Cap. 2 Problemas de Otimização Combinatória
aula 6

SIMO/MQDEE

MARIA CÂNDIDA MOURÃO

(cmourao@iseg.ulisboa.pt)

TSP – Modelos – CO – exemplo 3

Considere a matriz de custos seguinte relativa a um problema de Caixeiro viajante

$$\begin{array}{c c} i,j & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} \infty & 3 & 5 & 1 \\ \infty & \infty & 1 & 6 \\ 6 & 1 & \infty & 3 \\ 1 & 5 & \infty & \infty \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Formalize o problema e resolva-o pelo Solver/Excel
b) Utilize o Solver para obter a solução do problema relaxado em que não se consideram as restrições de eliminação de subcircuitos
c) Introduza na solução de b) restrições de eliminação de subcircuitos até encontrar uma SO do TSP
d) Identifique uma SA utilizando a heurística do vizinho mais próximo e uma pela de melhor inserção
e) Compare os valores obtidos por todos os métodos

TSP –Modelos – caso NO (simétrico)

- Dados: $G = (V, E)$; c_e; $\delta(i) =$ conjunto de arestas incidentes em $i \in V$
- Variáveis: $x_e = \begin{cases} 1 & \text{se o caixeiro utiliza a aresta } e \in E \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$
- Modelo:

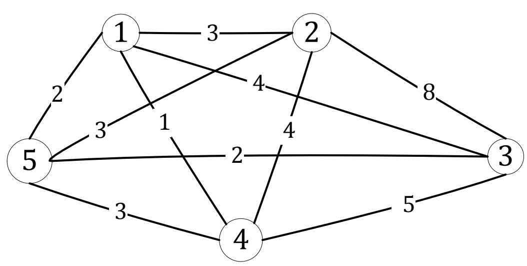
$$\text{(P2)} \quad \min \sum_{e \in E} c_e\, x_e \qquad \text{Minimização do custo total}$$

$$\text{s. a:} \begin{cases} \displaystyle\sum_{e \in E} x_e = n & \text{São usadas } n \text{ arestas na solução} \\ \displaystyle\sum_{e \in \delta(i)} x_e = 2 \quad \forall i \in V & \text{Em cada nodo } i \text{ incidem } 2 \text{ arestas} \\ \displaystyle\sum_{e \in (S,T)} x_e \geq 1 \quad \forall (S,T), S \subset V, T = V \backslash S & \text{Restrições de eliminação de subcircuitos ilegais} \\ x_e \in \{0,1\} \quad \forall e \in E & \end{cases}$$

TSP – Modelos – CNO - exemplo 1

Considere a matriz de custos seguinte relativa a um problema de Caixeiro viajante

$$\begin{array}{c|c} i,j & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 3 & 4 & 1 & 2 \\ & - & 8 & 4 & 3 \\ & & - & 5 & 2 \\ & & & - & 3 \\ & & & & - \end{pmatrix} \end{array}$$



a) Formalize o problema

b) Utilize o Solver para obter a solução do problema relaxado em que não se consideram as restrições de eliminação de subcircuitos. Classifique a solução obtida.

c) Compare os valores da solução obtida com o majorante obtido pela H. de Inserção mais próxima.

TSP –Relaxações – CO (assimétrico)

- ∀ SA verifica:
  - Cada nodo tem um arco a "entrar" e um a "sair"!
  - O circuito é conexo
- Relaxação:

~~Restrições de eliminação de subcircuitos ilegais~~

$$(\text{P1R1}) \quad \min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}\, x_{ij}$$ Minimização do custo total

s. a:

$$\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in V$$ De cada nodo i só sai uma ligação

$$\sum_{k:(k,i)\in A} x_{ki} = 1 \quad \forall i \in V$$ Só uma ligação é usada para entrar em cada nodo i

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A$$

Problema de Afetação (PA)

TSP –Relaxações – CO (assimétrico)

Resolução do PA:

- Construir um grafo bipartido: $G' = (S, T, A')$:
  - Para cada vértice $v \in V$ criar 2 vértices: $v_s \in S$ e $v_t \in T$
  - Para cada arco $(i,j) \in A$ criar um arco $(i_s, j_t) \in A'$ com custo c_{ij}
- Resolver o Problema de Afetação em G'
- Na solução do PA de custo mínimo em G' todos os vértices terão um arco a "sair" e um a "entrar"!
- Também se pode aplicar a problemas simétricos!

TSP –Relaxações – exemplos

a) Defina o PA que representa uma relaxação para o exemplo 3 (CO)

b) Resolva o problema de a) pelo Solver/Excel e, se necessário, introduzir cortes (quebras de subcircuitos ilegais) para encontrar a SO do problema inicial.

c) Defina o PA que representa uma relaxação para o exemplo 1 (CNO)

d) Resolva o problema de c) pelo Solver/Excel e, se necessário, introduzir cortes (quebras de subcircuitos ilegais) para encontrar a SO do problema inicial.

TSP –Relaxações – CO

- ∀ SA verifica:
  - Cada nodo tem um arco a "entrar" e um a "sair" !
  - O ciclo é conexo
- Relaxação – Sem restrições que garantem 1 arco a sair de cada nodo

$$\text{(P1R2)} \quad \min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}\, x_{ij}$$ Minimização do custo total

$$\text{s.a:} \begin{cases} \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji} = 1 & \forall i \in V \\ \sum_{i\in S} \sum_{j\in V\setminus S} x_{ij} \geq 1 & \forall S \subset V \\ x_{ij} \in \{0,1\} & \forall (i,j) \in A \end{cases}$$

Só uma ligação é usada para entrar em cada nodo i

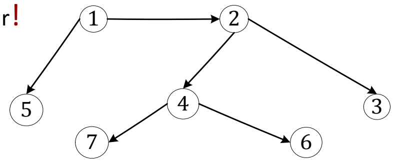
Restrições de eliminação de subcircuitos ilegais

∀ SA - 1 arco a "entrar" em cada nodo, num grafo conexo

TSP –Relações – CO – Arborescência

LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT UNIVERSIDADE DE LISBOA

- **Árvore** - grafo conexo e sem ciclos
- **Arborescência** - árvore com no máximo um arco a entrar em cada vértice, sendo a raiz o único vértice sem arcos a entrar!



- Arborescência geradora de G – arborescência que inclui todos os vértices de G
- Uma arborescência geradora de G com raiz num qualquer vértice de G, seja x, e em que se junta um arco a entrar em x, é um grafo conexo, em que todos os vértices têm um arco a entrar, mas em que podem existir vértices sem arcos a sair – Relaxação (P1R2)

TSP –Relações – CO – Arborescência

LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT UNIVERSIDADE DE LISBOA

Algoritmo – Relaxação:

- Identificar uma arborescência, T, de custo mínimo em G com raiz num qualquer vértice x
- Juntar a T o arco de menor custo a entrar em x

- O valor de T é um minorante para o valor do problema!

TSP –Relaxações – exemplo 3

a) Defina, a partir de uma arborescência geradora mínima, uma relaxação para o exemplo 3 e determine o correspondente minorante recorrendo ao Solver/Excel.

b) Compare o valor de a) com o minorante calculado pela resolução do PA.

c) Altere o valor $c_{23} = 6$ na matriz de custos e resolva a relaxação correspondente à arborescência geradora mínima pelo Solver/Excel. Caso necessário introduzir cortes (impondo que o grau externo dos vértices seja 1) para encontrar a SO do problema inicial.

TSP –Relaxações – CNO

- ∀ SA verifica:
  - Cada nodo tem 2 arestas nele incidentes
  - Um ciclo - conexo
- Relaxação – Sem restrições que garantem que o grau de cada nodo é 2

$$(\text{P2R2}) \min \sum_{e \in E} c_e \, x_e$$ Minimização do custo total

$$\text{s.a:} \begin{cases} \sum_{e \in E} x_e = n & \text{Usadas } n \text{ arestas} \\ \sum_{e \in (S,T)} x_e \geq 1 \quad \forall (S,T), S \subset V, T = V \backslash S & \text{Restrições de eliminação de subcircuitos ilegais} \\ x_e \in \{0,1\} \quad \forall e \in A & \end{cases}$$

∀ SA – n arestas que formam um grafo conexo

TSP –Relaxações – CNO

Algoritmo – Relaxação:

- Remover um vértice qualquer x de G
- Identificar uma árvore geradora no gafo resultante – tem $n-2$ arestas
- Juntar à árvore as duas arestas de menor custo incidentes em x

é uma Árvore-1

- O conjunto (grafo) assim construído satisfaz as restrições de (P2R2)!

TSP –Relaxações – exemplos

a) Definir, a partir de uma àrvore-1, uma relaxação para o exemplo 1 e determinar o correspondente minorante.

b) Comparar o valor de a) com o das restantes relaxações encontradas.

c) Resolver o problema de a) pelo Solver/Excel e, se necessário, introduzir cortes (impondo que o grau dos vértices seja 2) para encontrar a SO do problema inicial.

d) Comparar os valores dos minorantes obtidos com os valores das soluções heurísticas

TSP – Resumo

- **Heurísticas**
  - H. Construtiva: Vizinho + Perto; Inserção + Próxima
  - H. Melhorativa: k-opt; Inversão de subrotas
- **Modelos**
  - Caso Orientado (CO)
  - Caso Não Orientado (CNO)
- **Relaxações**
  - CO: SEM Rest. Subcircuitos ilegais ➡ PA
  - CO: SEM Rest. $\delta^+(i) = 1, \forall i$ ➡ Arborescência
  - CNO: SEM Rest. $\delta(i) = 2, \forall i$ ➡ Árvore-1

TSP – exercício 2 - CNO

Considere a matriz de custos seguinte relativa a um problema de Caixeiro Viajante

	C1	C2	C3	C4	C5	C6
C1	∞	7	10	12	2	9
C2		∞	11	14	8	1
C3			∞	12	6	8
C4				∞	7	9
C5					∞	11

a) Formalize o problema.

b) Identifique uma solução admissível pelo método de inserção mais próxima.

c) Identifique um minorante recorrendo à resolução de um PA.

d) Introduza, na solução de c) restrições relaxadas até encontrar uma SO do TSP.

e) Repita b) e c) considerando a relaxação que resulta na resolução de um problema de árvore-1.

TSP – exercício 3 - CO

Considere a matriz de custos seguinte relativa a um problema de Caixeiro Viajante

	C1	C2	C3	C4	C5
C1	∞	3	7	6	2
C2	4	∞	11	9	6
C3	2	6	∞	1	5
C4	5	5	3	∞	4
C5	6	2	7	6	∞

a) Formalize o problema

b) Identifique uma SA pelo método de Inserção Mais Próxima

c) Identifique um minorante recorrendo à resolução de um PA.

d) Introduza, na solução de c) restrições relaxadas até encontrar uma SO do TSP.

e) Repita b) e c) considerando a relaxação que resulta na resolução de um problema de arborescência.